

О множествах неединственности для пространств голоморфных функций

Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин

12 октября 2016 г.

Аннотация

В статье усовершенствуются и уточняются некоторые наши результаты из предшествующей нашей недавней статьи из журнала «Известия вузов. Математика» 2015 г. за счет последних наших результатов 2016 г. об оценках снизу субгармонических функций логарифмом модуля голоморфной ненулевой функции.

Введение

Как обычно, \mathbb{R} и \mathbb{C} — множества соответственно всех *вещественных* и *комплексных чисел* или их естественные геометрические интерпретации; кроме того, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — *единичный круг* на комплексной плоскости \mathbb{C} . Используются определения и понятия из [1]–[4], но при необходимости мы их повторяем. Пусть D — область в \mathbb{C} . Каждой не более чем счетной последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \geq 1} \subset D$ без точек сгущения в D сопоставляем *считающую меру* n_Λ , а именно: $n_\Lambda(S) := \sum_{\lambda_k \in S} 1$ — число точек из Λ , попавших в $S \subset D$. Заметим, что среди точек λ_k могут быть и повторяющиеся. По определению функция $n_\Lambda(\lambda) := n_\Lambda(\{\lambda\})$ — дивизор последовательности Λ , т.е. число повторений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательности Λ . Так, $\lambda \in \Lambda$, если $n_\Lambda(\lambda) > 0$.

Векторное пространство всех голоморфных в D функций обозначаем как $\text{Hol}(D)$. Если не оговорено противное, пространство $\text{Hol}(D)$ наделяем топологией равномерной сходимости на компактах из D . Ненулевой функции $f \in \text{Hol}(D)$ соответствует *последовательность нулей* Zero_f , перенумерованная с учетом кратности.

Для компакта $C \subset \mathbb{C}$ через $\text{CHol}[C]$ обозначаем векторное пространство над полем \mathbb{C} непрерывных на C комплекснозначных функций, одновременно голоморфных во *внутренности* $\text{int } C$, если она не пуста, с естественной sup -нормой.

Последовательность точек $\Lambda \subset D$ называется *подпоследовательностью нулей* для подмножества $H \subset \text{Hol}(D)$, если найдется ненулевая функция $f \in H$, для которой $\Lambda \subset \text{Zero}_f$ в том смысле, что $n_\Lambda(\lambda) \leq n_{\text{Zero}_f}(\lambda)$ для всех $\lambda \in D$. Если H замкнуто относительно вычитания, например, векторное подпространство над \mathbb{R} , то подпоследовательность нулей для H называют и *последовательностью*, или *множеством, неединственности* для H .

Выпуклый конус всех субгармонических функций в области $D \subset \mathbb{C}$ обозначаем через $\text{sbh}(D)$. Субгармоническую функцию, тождественно равную $-\infty$ на D , обозначаем $-\infty$. Для $s \in \text{sbh}(D)$ меру Рисса функции s чаще всего будем обозначать как ν_s , и наоборот, субгармоническую функцию s в D с мерой Рисса ν часто

записываем в виде $s := s_\nu$. Борелевскую положительную меру (конечную на компактах из D), или меру Радона ν [3, Appendix A], называем *подмерой для подмножества* $S \subset \text{sbh}(D)$, если найдется функция $s \in S$, которая $\neq -\infty$, с мерой Рисса $\nu_s \geq \nu$ на D . Иначе говоря, ν — подмера для S , если для некоторой (любой) субгармонической функции s_ν с мерой Рисса ν найдется функция $v \in \text{sbh}(D)$, не равная $-\infty$, для которой $s := s_\nu + v \in S$. Возможность варьирования слов «некоторый» и «любой» в последнем предложении обеспечена «нечувствительностью» неравенств к перекидыванию гармонических слагаемых от одного субгармонического слагаемого к другому.

Для (весовой) функции $M: D \rightarrow [-\infty, +\infty]$ со значениями в расширенной вещественной оси $[-\infty, +\infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ с естественным отношением порядка определим весовой класс субгармонических функций

$$\text{sbh}(D; M) := \{s \in \text{sbh}(D) : s \leq M + \text{const на } D\},$$

где здесь и далее const — какая-либо постоянная, а « $s \leq M + \text{const на } D$ » означает выполнение поточечных неравенств $s(z) \leq M(z) + \text{const}$ во всех точках $z \in D$. Аналогично, определим весовое пространство голоморфных функций

$$\text{Hol}(D; \exp M) := \{f \in \text{Hol}(D) : |f| \leq \text{const} \cdot \exp M \text{ на } D\}.$$

В разделе 1 рассматривается следующая задача. Пусть N и M — две весовые функции в области $D \subset \mathbb{C}$ и Λ — последовательность точек в D . При каких простых соотношениях между N и M некоторая подмера $\mu \geq n_\Lambda$ для $\text{sbh}(D; M)$ определяет подпоследовательность нулей Λ для пространства $\text{Hol}(D; \exp N)$ или, возможно, чуть большего пространства? Более или менее удовлетворительное решение этой задачи позволяет свести исследование подпоследовательностей нулей к гибкому аппарату субгармонических функций, к тому же в классах $\text{sbh}(D; M]$, отличных от $\text{sbh}(D; N]$. Также в важном подразделе 2 тот же вопрос отдельно исследуется для весовых пространств функций на всей плоскости \mathbb{C} , определяемых положительно однородными при показателе $\rho > 0$ весовыми функциями.

1 Последовательности неединственности

Пусть S — подмножество расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Для подмножества $S \subset \mathbb{C}_\infty$ через $\text{clos } S$ и $\text{bd } S$ обозначаем соответственно замыкание и границу S в \mathbb{C}_∞ ; на евклидовом пространстве $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ — евклидово расстояние между двумя объектами (точками, подмножествами) в евклидовом пространстве (в нашем случае \mathbb{R} или \mathbb{C}). Пусть D — область в \mathbb{C} . Пусть $d: D \rightarrow (0, 1]$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$0 < d(z) < \text{dist}(z, \text{bd } D), \quad z \in D. \quad (1)$$

Каждой функции N сопоставляем ее усреднение по кругам с центром z радиуса $0 < r < \text{dist}(z, \text{bd } D)$, обозначаемое как

$$B(z, r; N) := \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r N(te^{i\theta}) t \, dt \, d\theta. \quad (2)$$

Весовой функции $N: D \rightarrow [-\infty, +\infty]$ будем сопоставлять некоторое ее «поднятие» $N^\uparrow: D \rightarrow [-\infty, +\infty]$, а именно: для каждого $z \in D$ полагаем

1. Если $\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } D \neq \emptyset$ (непусто), то полагаем

$$N^\uparrow(z) := B(z, d(z); N) + \ln \frac{1}{d(z)}. \quad (3)$$

2. Если $D = \mathbb{C}$ — комплексная плоскость, то для любого сколь угодно большого числа $P > 0$ можем положить

$$N^\uparrow(z) := B\left(z, \frac{1}{(1 + |z|)^P}; N\right). \quad (4)$$

Замечание 1 Обратим внимание, что предложенные функции-поднятия N^\uparrow , в отличие от предложенных ранее четырех таких функций (2a)–(2d) в [5, перед теоремой 1], которые здесь не приводятся ввиду громоздкости, значительно тоньше, компактнее и существенно более медленного роста. Таким образом, предлагаемая ниже теорема 1 намного более точная, чем предшествующая ей [5, теорема 1] 2015 г.

Теорема 1 Пусть D — область в \mathbb{C} , функции $N, M \in \text{sbh}(D)$, $M - N \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν_{M-N} , $N, M \neq -\infty$, Λ — последовательность точек в D .

Если Λ — последовательность неединственности для $\text{Hol}(D; \exp N]$, то $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\text{sbh}(D; M]$.

Обратно, если $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\text{sbh}(D; M]$, N — непрерывная функция на D , то последовательность точек Λ — последовательность неединственности для пространства $\text{Hol}(D; \exp N^\uparrow]$ с подходящей весовой функцией-поднятием N^\uparrow из (3) при $\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } D \neq \emptyset$ и с функцией-поднятием N^\uparrow при произвольном фиксированном числе $P > 0$ из (4) при $D = \mathbb{C}$.

Доказательство Пусть Λ — последовательность неединственности для $\text{Hol}(D; \exp N]$. Это означает, что для функции f_Λ с $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$ найдется ненулевая функция $h \in \text{Hol}(D)$, для которой произведение $f_\Lambda h \in \text{Hol}(D; N]$, или $\log |f_\Lambda| + \log |h| \leq N$. Введем обозначение

$$s_{\nu_{M-N}} := M - N \in \text{sbh}(D) \quad (5)$$

Тогда $\log |f_\Lambda| + \log |h| + s_{\nu_{M-N}} \leq N + (M - N) = M$ на D , т.е. для меры Рисса $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ субгармонической функции $\log |f_\Lambda| + s_{\nu_{M-N}}$ нашлась субгармоническая функция $v = \log |h| \neq -\infty$, для которой сумма $(\log |f_\Lambda| + s_{\nu_{M-N}}) + v$ принадлежит классу $\text{sbh}(D; M]$. Таким образом, установлено, что $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\text{sbh}(D; M]$. Обратно, пусть $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\text{sbh}(D; M]$. Это значит, что найдется функция $w \in \text{sbh}(D)$ с которой в обозначении (5)

$$\log |f_\Lambda| + s_{\nu_{M-N}} + w \leq M + \text{const} \quad \text{на } D.$$

Иначе

$$\log |f_\Lambda| + M - N + w - \text{const} \leq M \quad \text{на } D,$$

т.е.

$$\log |f_\Lambda| + v \leq N \quad \text{на } D \quad (6)$$

для функции $v = w - \text{const} \in \text{sbh}(D)$, $v \neq -\infty$. Будет использовано

Предложение 1 ([6, следствие 3]) Пусть D — область в \mathbb{C} , удовлетворяющая условию $\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } D \neq \emptyset$ с непрерывной функцией $d: D \rightarrow (0, 1]$, для которой выполнено условие (1). Для субгармонической в D функции $v \neq -\infty$ найдется ненулевая функция $h \in \text{Hol}(D)$, удовлетворяющая условию

$$\log |h(z)| \leq B(z, d(z); v) + \ln \frac{1}{d(z)} \quad \text{для всех } z \in D. \quad (7)$$

Применим усреднения по шарам к обеим частям

$$B(z, d(z); \log |f_\Lambda|) + B(z, d(z); v) \leq B(z, d(z); N),$$

или, в силу субгармоничности $\log |f|$,

$$\log |f_\Lambda| + B(z, d(z); v) \leq B(z, d(z); N).$$

Применяя к последнему неравенству соотношение (7) предложения 1, получаем требуемый случай с поднятием N^\uparrow из (3), поскольку ненулевая голоморфная функция $f_\Lambda h$ с подпоследовательностью нулей Λ принадлежит уже классу $\text{Hol}(D; \exp N^\uparrow)$.

Доказательство для случая $D = \mathbb{C}$ проводится совершенно аналогично через

Предложение 2 ([6, следствие 2 с комментарием]) . Для любой субгармонической в \mathbb{C} функции $v \neq -\infty$ для любого сколь угодно большого числа $P > 0$ найдется ненулевая целая функция $h \in \text{Hol}(D)$, удовлетворяющая условию

$$\ln |h(z)| \leq B\left(z, \frac{1}{(1 + |z|)^P}; v\right) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

2 Положительно ρ -однородные субгармонические функции

Мы вынуждены повторить и напомнить некоторые сведения, собранные в [5, п. 3.1] Пусть $\rho \in (0, +\infty)$. Обозначим через $\rho\text{-shg}(\mathbb{C}) \subset \text{sbh}(\mathbb{C})$ множество субгармонических положительно однородных при показателе ρ функций $H \neq -\infty$, т. е. $H(tz) = t^\rho H(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$, $t \geq 0$. Через $\rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ обозначаем множество 2π -периодических ρ -тригонометрически выпуклых¹ функций $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, [1], [2], [7], [8] :

$$h(\theta) \sin \rho(\theta_2 - \theta_1) \leq h(\theta_1) \sin \rho(\theta_2 - \theta) + h(\theta_2) \sin \rho(\theta - \theta_1), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \theta_1 + \frac{\pi}{\rho}. \quad (9)$$

Известно, что

1. Отображение-расширение $\text{ext}: h \mapsto (H: re^{i\theta} \mapsto h(\theta)r^\rho, r \geq 0, \theta \in \mathbb{R})$, функций $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задает аддитивную положительно однородную сохраняющую точную верхнюю грань биекцию выпуклого конуса $\rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ на выпуклый конус $\rho\text{-shg}(\mathbb{C})$, и функции из $\rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ и $\rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ непрерывны [1]–[7, § 2.3, I–VI], [8, Свойство 9.5, Теоремы 9.12];

¹Используют также термины *тригонометрически ρ -выпуклая*, или *тригонометрически выпуклая при показателе (порядке) ρ* .

2. функция $H \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ удовлетворяет локальному условию Липшица в форме (см. [7, § 2.3, IV] и подробнее [8, Свойство 9.25 и Следствие 9.26 с доказательством])

$$|H(z) - H(w)| \leq \rho \max_{\varphi \in \mathbb{R}} H(e^{i\varphi}) \cdot (\max\{|z|, |w|\})^{\rho-1} |z - w|, \quad z, w \in \mathbb{C}, \quad (10)$$

и, как следствие из (ρ1), функция $h \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Липшица

$$|h(\theta) - h(\vartheta)| \leq \rho \max_{\varphi \in \mathbb{R}} h(\varphi) \cdot |\theta - \vartheta|, \quad \theta, \vartheta \in \mathbb{R}; \quad (11)$$

3. в обозначениях из (ρ1) плотность меры Рисса $d\nu_H$ функции $H \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ в полярных координатах определяется как произведение плотностей мер

$$d\nu_H(re^{i\theta}) = r^{\rho-1} dr \otimes \frac{1}{2\pi} (h''(\theta) + \rho^2 h(\theta)) d\theta, \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad r \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

где производные понимаются в смысле теории распределений, или обобщенных функций, а $h'' + \rho^2 h \geq 0$ — положительная 2π -периодическая мера на \mathbb{R} .

Пусть $h_1, h_2 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$. Воспользуемся терминологией диссертации А. В. Абанина [9, § 2.5] 1995 г., широко используемой при исследовании абсолютно представляющих систем. Называем функцию h_1 ρ -выпукло дополнимой до h_2 , если $h_2 - h_1 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$. В этом случае представляется естественным называть и (см. (ρ1)) функцию $H_1 := \text{ext } h_1 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ ρ -выпукло дополнимой до $H_2 := \text{ext } h_2 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$. Из (ρ3) сразу следует, что h_1 ρ -выпукло дополнима до h_2 , если и только если в смысле теории распределений, или обобщенных функций, $(h_2 - h_1)'' + \rho^2(h_2 - h_1) \geq 0$, т. е. слева положительная 2π -периодическая мера на \mathbb{R} . В частности, отсюда

1. если функция $g \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ дифференцируема на \mathbb{R} , т. е. $g \in C^1(\mathbb{R})$, и

$$g'(\psi) - g'(\varphi) \geq -c(\psi - \varphi), \quad 0 \leq \varphi < \psi < 2\pi, \quad (13)$$

где $0 < c < \rho^2 \min\{g(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$, то любая функция $h \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ класса $C^1(\mathbb{R})$, для которой

$$h'(\psi) - h'(\varphi) \leq C(\psi - \varphi), \quad 0 \leq \varphi < \psi < 2\pi, \quad C — \text{постоянная}, \quad (14)$$

ρ -выпукло дополнима до функции $qg \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ для любого числа (см. [9, Лемма 2.5.1 и ее доказательство])

$$q > \frac{C + \rho^2 \max h}{\rho^2 \min g - c}; \quad (15)$$

2. если $g \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$, $\min\{g(\theta) + g(\theta + \pi/\rho) : \theta \in [0, 2\pi]\} > 0$, и g' — неубывающая на $[0, 2\pi)$ (в частности, сюда включается и случай постоянной функции $g(\theta) \equiv R > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$), а $h \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет (14), то функция h ρ -выпукло дополнима до qg для любого q из (15) при $c = 0$ [9, § 2.5, Следствие 1];

3. если $g \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет (13), а $h \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вторую производную, т. е. в (14) постоянная $C = \sup |h''|$, то функция h ρ -выпукла дополнима до $qg \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ для любого числа q из (15) [9, § 2.5, Следствие 1].

Теорема 2 Пусть функция $h_1 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ ρ -выпукло дополнима до $h_2 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$, т. е. в обозначениях из (ρ1) функция $H_1 := \text{ext } h_1 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ ρ -выпукло дополнима до функции $H_2 := \text{ext } h_2 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$, а мера ν определена через произведение плотностей мер в полярных координатах по правилу (см. и ср. с (12))

$$d\nu(re^{i\theta}) = r^{\rho-1} dr \otimes \frac{1}{2\pi} ((h_2 - h_1)'' + \rho^2(h_2 - h_1))(\theta) d\theta, \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad r \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Далее, пусть Λ последовательность точек в \mathbb{C} . Тогда если Λ — последовательность неединственности для $\text{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_1]$, то $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\text{sbh}(\mathbb{C}; H_2]$, и обратно, если $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\text{sbh}(\mathbb{C}; H_2]$, то при любом значении $\rho > 0$ последовательность Λ — последовательность неединственности для $\text{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_1]$.

Доказательство опускаем. Оно почти дословно повторяет доказательство [5, теорема 2], в которой различаются случаи $\rho \leq 1$ и $\rho > 1$, где в заключении в последнем случае возникала существенная добавка-мультипликатор в виде $\text{Hol}(\mathbb{C}; p \exp H_1]$, где p достаточно быстро растущий многочлен. Такой результат со степенной добавкой значительно ослабляет теорему 2. Улучшение в данном случае достигается за счет очень мало отличающейся функции-поднятия из (4) от исходной функции N .

Замечание 2 Возможны обобщения результатов статьи на функции нескольких комплексных переменных, что предполагается проделать в ином месте.

Список литературы

- [1] Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций*. М.: Физматгиз, 1956, 536 стр.
- [2] Levin B. Ya. *Lectures on entire functions* Providence RI: Amer. Math. Soc., Transl. Math. Monographs, **150**, 1996, 180 pp.
- [3] Ransford Th. *Potential Theory in the Complex Plane*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, 232 pp.
- [4] Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности*, 4-е доп. изд., Уфа: РИЦ БашГУ, 2012, 198 стр.
- [5] Хабибуллин Б. Н. *Последовательности неединственности для весовых пространств голоморфных функций* // Изв. вузов. Математика, 2015, **59**:4, 63–70.
- [6] Хабибуллин Б. Н., Байгускаров Т. Ю. *Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции* // Матем. заметки, 2016, **99**:4, 588–602.

- [7] Евграфов М. А. *Асимптотические оценки и целые функции*. М.: Физматлит, 1979, 198 стр.
- [8] Маергойз Л. С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения*. Новосибирск: Наука, 1996, 398 стр.
- [9] Абанин А. В. *Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы*. Дисс. доктора физ.-матем. наук, РГУ, Ростов-на-Дону, 1995, 280 стр.